Fakultet kemijskog inženjerstva i tehnologije

Zavod za matematiku

Marulićev trg 19 10 000 Zagreb

FOURIEROVI REDOVI I INTEGRALI

Studenti: *Ana Škrobica*

Andreja Prtenjak

2006/2007

SADRŽAJ

Uvod

Pri rješavanju različitih inženjerskih problema koriste se periodične funkcije. Pojavljuju se pod terminom periodične funkcije, a u ovu skupinu spadaju trigonometrijske funkcije, sinus i kosinus, koje imaju važnost u praktičnoj primjeni, a vode nas do Fourierovih redova.

Ime su dobili po francuskom fizičaru Josephu Fourieru (1768-1830), a važne su u proučavanju signala, titranja, rezonancije i pri rješavanju problema vezanih uz obične i parcijalne diferencijalne jednadžbe.

1. Periodične funkcije. Trigonometrijski nizovi

U tehnici i fizici često se susrećemo s periodičnim pojavama i procesima. Znamo da je funkcija $f : R \rightarrow R$ **periodična funkcija** ako postoji $T \neq 0$ takav da vrijedi

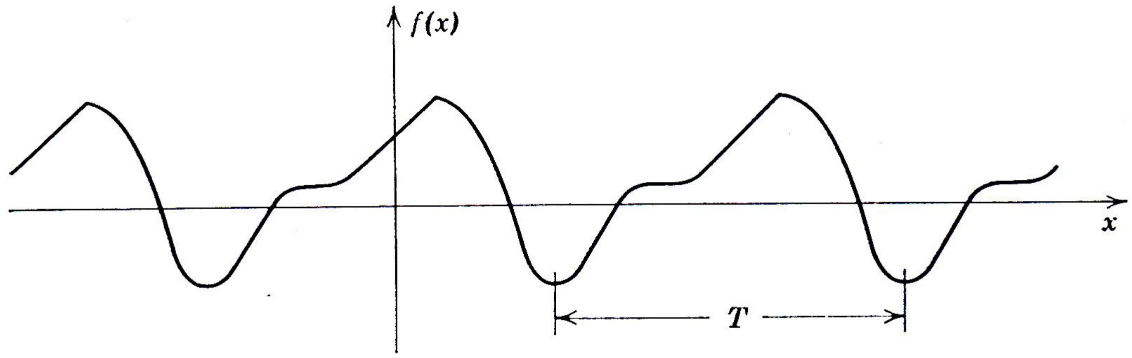
(1) $f(x + T) = f(x)$

za svaki x koji je element skupa R realnih brojeva.

Broj T se tada zove period [1] funkcije $f(x)$.

[1] Najmanji pozitivni period T funkcije $f(x)$, koja nije konstanta, češće se naziva primitivni period od $f(x)$. Npr. primitivni periodi funkcije sinx i funkcije sin $2x$ su 2π odnosno π

Grafovi takve funkcije dobivaju se periodičnim ponavljanjem grafa unutar bilo kojeg intervala duljine perioda T.



Slika 1. Periodična funkcija

Iz toga proizlazi da za bilo koji cijeli broj n:

$f(x + nT) = f(x)$

dakle svaki višekratnik

nT ($n \neq 0$) od T također je period te funkcije.

Ako funkcije $f(x)$ i $g(x)$ imaju period T tada će i funkcija

$h(x) = af(x) + bg(x)$ (a, b konstante)

imati period T.

Standardni primjeri periodičnih funkcija su sinusne i kosinusne funkcije i napominjemo da su funkcije $f = c =$ const. također periodične funkcije u smislu definicije, jer zadovoljavaju uvjet (1) za svaki pozitivan period T.

Naš problem bit će prikaz različitih funkcija s periodom 2π kao što su:

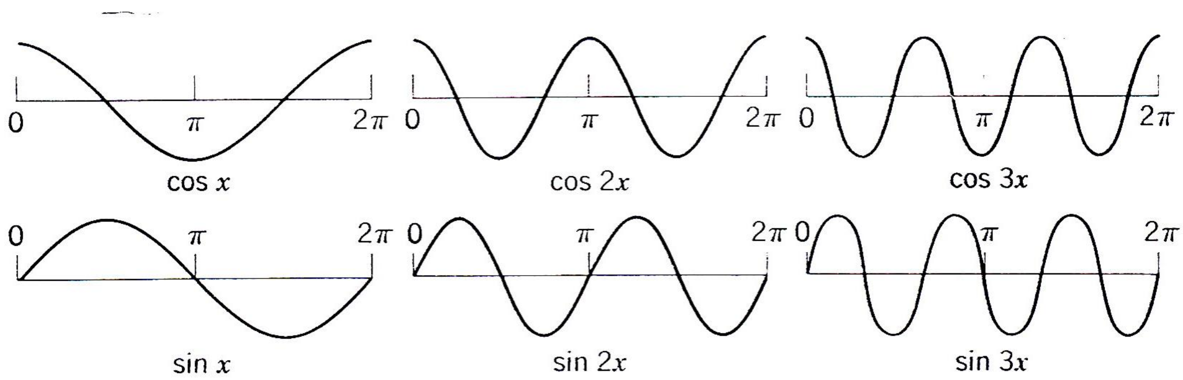
1. $\cos x$, $\sin x$, $\cos 2x$, $\sin 2x$,...., $\cos nx$, six nx,....

Redovi koji se pojavljuju unutar ovog poglavlja mogu se zapisati u obliku trigonometrijskog izraza:

(2) $a_0 + a_1 \cos x + b_1 \sin x + a_2 \cos 2x + b_2 \sin 2x + ...$

gdje su $a_0, a_1, a_2, ...a_n, b_1, b_2, ...b_n$ ... realne konstante.

Ovakvi redovi se nazivaju trigonometrijski redovi, a članovi a_n i b_n se nazivaju koeficijenti trigonometrijskog reda. Vidljivo je da svaki član ovog reda ima period 2π. Ako trigonometrijski red konvergira, suma će biti funkcija s periodom 2π.



Slika 2. Sinusne i kosinusne funkcije sa periodom 2π

Periodične funkcije koje se pojavljuju u inženjerskim problemima su često komplicirane i poželjno je predočiti takve funkcije kao jednostavne periodične funkcije.

Vidljivo je da se bilo koja periodična funkcija *f(x)* s periodom 2π može aproksimirati trigonometrijskim redom, koeficijenti u (2) mogu se izvesti u terminima funkcije *f(x)* (primjeri vezani uz vibracije i oscilacije).

2. Fourierovi redovi. Eulerove formule

Pretpostavimo da je *f(x)* periodična funkcija s periodom 2π, koju možemo prikazati trigonometrijskim redom.

(1) $$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

Želimo odrediti koeficijente a_n i b_n u odgovarajućem redu (1). Prvo izračunavamo koeficijent a_0 integrirajući izraz (1) s obje strane od $-\pi$ do π i dobiva se:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \int_{-\pi}^{\pi} \left[a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \right] dx$$

Parcijalna integracija daje nam sljedeću jednakost:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = a_0 \int_{-\pi}^{\pi} dx + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos nxdx + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin nxdx)$$

Prvi dio izraza na desnoj strani jednak je $2\pi a_0$ dok su ostali integralni izrazi jednaki nuli, te provedbom integracije dobivamo:

(2) $$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx$$

područje ispod krivulje funkcije *f(x)* od $-\pi$ do π podijeljeno s 2π.

Sada ćemo redom izračunati koeficijente $a_{1,} a_2,...$ sličnim postupkom .

Množit ćemo s cos *mx*, gdje je m bilo koji fiksni pozitivan broj. Slijedi:

(3) $$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos mx dx = \int_{-\pi}^{\pi}\left[a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx\right]\cos mx dx$$

Integrirajući član po član proizlazi da je desna strana jednaka:

$$a_0 \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx dx + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n \int_{-\pi}^{\pi}\cos nx \cos mx dx + b_n \int_{-\pi}^{\pi}\sin nx \cos mx dx\right]$$

Prvi integral i zadnji integral jednaki su nuli zato jer je podintegralni izraz neparna funkcija.

Primjenjujući svojstva parnosti i neparnosti funkcije na drugi integral dobivamo izraz:

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx \cos mx dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(n+m)dx + \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(n-m)dx$$

U ovoj formuli prvi integral s desne strane jednak je nuli za svaki m i n koji se uzimaju u obzir i posljednji integral također je jednak nuli kada je $n \neq m$ ili iznosi π za svaki $n = m$. Proizlazi da je desna strana (3) jednaka $a_m\pi$ i dobiva se :

(4) $$a_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos mx dx$$

m=1,2...

Konačno možemo izračunati koeficijente b_1, b_2,... u (1) pri čemu množimo sa sin *mx*, gdje je *m* bilo koji fiksni pozitivan broj.

Integracijom dobivenog izraza od $-\pi$ do π dobivamo:

(5) $$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin mx dx = \int_{-\pi}^{\pi}\left[a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx\right]\sin mx dx$$

Integrirajući član po član, vidimo da je desna strana izraza jednaka:

$$a_0 \int_{-\pi}^{\pi}\sin mx dx + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n \int_{-\pi}^{\pi}\cos nx \sin mx dx + b_n \int_{-\pi}^{\pi}\sin nx \sin mx dx\right]$$

Prvi integral jednak je nuli. Sljedeći integral je poput onih koji su razmatrani ranije i također je jednak nuli za svaki n = 1, 2,...

Posljednji integral može se transformirati u izraz (1) i dobivamo:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \sin mx dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(n-m)x dx - \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(n+m)x dx$$

Posljednji član ovog izraza jednak je nuli. Prvi član s desne strane jednak je nuli za svaki $\mathrm{n} \neq \mathrm{m}$ ili iznosi π za svaki $n = m$.

Kao i u izrazu (5) i ovaj je član pomnožen faktorom b_m. Desna strana izraza (5) postaje $b_m\pi$, dakle:

$$b_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin mx dx \qquad \text{m=1, 2,…}$$

Upisujući *n* umjesto m u ovu formulu i u (4), zajedno ćemo dobiti **Eulerove formule:**

(a) $$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx$$

(6) (b) $$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx \qquad \text{n=1, 2,…}$$

(c) $$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx$$

Pomoću periodične funkcije *f(x)* s danim periodom 2π, možemo izračunati koeficijente a_n i b_n, prema (6) i formirati trigonometrijski niz:

(7) $$a_0 + a_1 \cos x + b_1 \sin x + a_2 \cos 2x + b_2 \sin 2x + ... + a_n \cos nx + b_n \sin nx + \dots$$

Ovaj red se naziva **Fourierov red** i odgovara *f(x)* i njene koeficijente nazivamo **Fourierovi koeficijenti** funkcije *f(x).*

Zbog periodičnosti podintegralnih funkcija, interval integracije u (6) može se zamijeniti s bilo kojim intervalom duljine 2π, npr. intervalom $0 \le x \le 2\pi$.

Iz definicije određenog integrala slijedi činjenica da ako je funkcija *f(x)* neprekinuta ili samo po dijelovima neprekinuta integral te funkcije u (6) postoji i možemo izračunati Fourierove koeficijente za danu funkciju prema (6).

<u>TEOREM 1</u>

Ako imamo periodičnu funkciju *f(x)* sa periodom 2π koja je djelomično neprekidna unutar intervala $-\pi \leq x \leq \pi$ i ukoliko postoji njena derivacija i s lijeve i sa desne strane u svakoj točki unutar intervala integracije tada za odgovarajući Fourierov red kažemo da je konvergentan.

PRIMJEDBA: Ukoliko Fourierov red odgovarajuće funkcije *f(x)* konvergira, kao što je objašnjeno u teoremu 1, red se naziva Fourierovim redom funkcije *f(x)* pa možemo pisati:

$$f(x) = a_0 + a_1 \cos x + b_1 \sin x + a_2 \cos 2x + b_2 \sin 2x + ... + a_n \cos nx + b_n \sin nx + ...$$

i kažemo da *f(x)* predstavlja Fourierov red dotične funkcije.

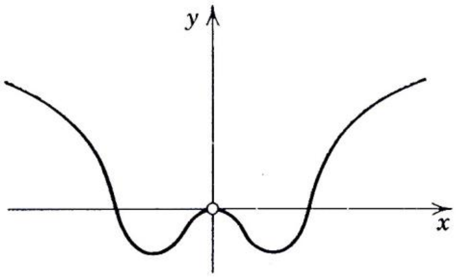
Kako je ovaj niz konvergentan, i novodobiveni red imat će sumu jednaku sumi originalnog reda pa možemo pisati:

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx$$

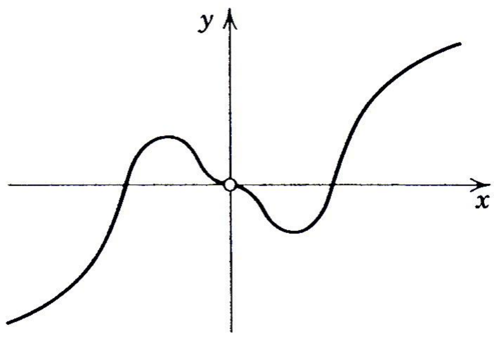
3. Parne i neparne funkcije

Funkcija y = g(x) je parna ako g(-x) =g(x) za sve x. Graf ovakvih funkcija simetričan je s obzirom na ordinatu .

Za funkciju *h(x)* kažemo da je neparna ako vrijedi *h(-x)* = *-h(x).*



Slika 3. Parna funkcija



Slika 4. Neparna funkcija

Funkcija cos *nx* je parna funkcija dok je sin *nx* neparna funkcija. Ako je funkcija *g(x)* parna funkcija tada vrijedi:

(1) $$\int_{-\pi}^{\pi} g(x)dx = 2\int_{0}^{\pi} g(x)dx$$

Ako je funkcija h(x) neparna tada vrijedi :

(2) $$\int_{-\pi}^{\pi} h(x)dx = 0$$

Formule (1) i (2) proizlaze iz grafova tih funkcija što se vidi s grafova funkcija g i h.

Produkt funkcija *q* = *gh,* pri čemu je *g* parna funkcija, a *h* neparna funkcija je neparna funkcija jer:

$$q(-x) = g(-x)h(-x) = g(x)\;\; -h(x)\;\; = -q(x)$$

Stoga ako je funkcija *f(x)* parna tada je $f(x)\sin nx$ neparna i Fourierov koeficijent b_n = 0. Slično ako je funkcija *f(x)* neparna tada je i funkcija $f(x)\cos nx$

$(m \neq n)$ također neparna,a koeficijent $a_n = 0$.

Iz ovog i relacije (1) proizlazi:

TEOREM 1.

Fourierov red bilo koje parne periodične funkcije s periodom 2π je kosinusni Fourierov red koji zapisujemo:

(3) $$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{n} (a_n \cos nx)$$

s koeficijentima....

(4) $$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)dx \qquad a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nxdx \qquad \text{n=1,2,…}$$

Fourierov red bilo koje neparne periodične funkcije perioda 2π je tzv. sinusni Fourierov red koji zapisujemo:

(5) $$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$$

s koeficijentima

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nxdx$$

Daljnja pojednostavljenja proizlaze iz slijedećeg teorema:

TEOREM 2.

Fourierovi koeficijenti sume f_1+ f_2 su suma odgovarajućih Fourierovih koeficijenata od f_1 i f_2.

4. Funkcije koje imaju proizvoljan period

Prijelaz iz funkcije perioda 2π na funkcije koje imaju period T prilično je jednostavan zbog toga što se može provesti izmjena skale. Naime, ako je *f(t)* ima period T, tada možemo uvesti novu varijablu *x* tako da nova funkcija f(t), kao funkcija od x, ima period 2π. Ako stavimo:

(1) (a) $$t = \frac{T}{2\pi}x$$ onda je

(b) $$x = \frac{2\pi}{T}t$$

i $x=\pm\pi$ odgovara $t=\pm T/2$ što znači da *f*, kao funkcija od x ima period 2π i možemo pisati Fourierov red u sljedećem obliku

(2) $$f(t) = f\left(\frac{T}{2\pi}x\right) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

čije koeficijente dobivene iz jednadžbe (6) zapisujemo u ovom obliku i računamo prema sljedećim formulama

(a) $$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{T}{2\pi}x\right)dx$$

(6) (b) $$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{T}{2\pi}x\right)\cos nx\,dx$$

(c) $$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{T}{2\pi}x\right)\sin nx\,dx$$

Možemo primjeniti i ove formule direktno ali promjenom perioda T pojednostavljujemo jednadžbu:

$$x = \frac{2\pi}{T}t$$ slijedi $$dx = \frac{2\pi}{T}dt$$

Interval integracije se mijenja i postaje:

$$-\frac{T}{2} \le t \le \frac{T}{2}$$

Posljedično, dobivamo Eulerove formule:

(a) $$a_0 = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t)dt$$

(3) (b) $$a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t)\cos\frac{2n\pi}{T}dt \qquad \text{n=1,2...}$$

(c) $$b_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t)\sin\frac{2n\pi}{T}dt$$

za Fourierove koeficijente funkcije *f(t).*

Fourierov red (2) u kojem je varijabla *x* zamjenjena varijablom *t* ima sljedeći oblik:

(4) $$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos\frac{2n\pi}{T}t + b_n \sin\frac{2n\pi}{T}t)$$

Interval integracije u jednadžbi (3), može se zamjeniti s bilo kojim intervalom duljine *T,* primjerice intervalom $0 \le t \le T$.

Iz teorema (1) u poglavlju 3. slijedi :

<u>TEOREM 1.</u>

Fourierov red parne funkcije *f(t)* perioda T je kosinusni Fourierov red :

(5) $$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{2n\pi}{T}t$$

s koeficijentima:

(6) $$a_0 = \frac{2}{T}\int_0^{T/2} f(t)dt \qquad a_n = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(t)\cos\frac{2n\pi}{T}tdt \qquad \text{n=1,2...}$$

Fourierov red neparne funkcije *f(t)* perioda T je sinusni Fourierov red za koji vrijedi:

(7) $$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{2n\pi}{T}t$$

s koeficijentima:

(8) $$b_n = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(t)\sin\frac{2n\pi}{T}tdt$$

5. Poluperiodično proširenje reda

Neka funkcija *f(t)* ima period T =2*l*. Ako je ta funkcija parna iz teorema (1) slijedi da je Fourierov red kosinusni:

(1) $$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi}{l}t$$ (*f* parna funkcija)

s koeficijentima:

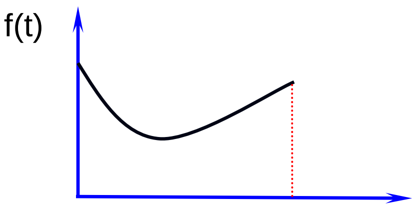
(2) $$a_0 = \frac{1}{l}\int_0^{l} f(t)dt \qquad a_n = \frac{2}{l}\int_0^{l} f(t)\cos\frac{n\pi}{l}tdt \qquad \text{n=1,2...}$$

Ako je ta funkcija *f(x)* neparna funkcija dobiva se Fourierov sinusni red:

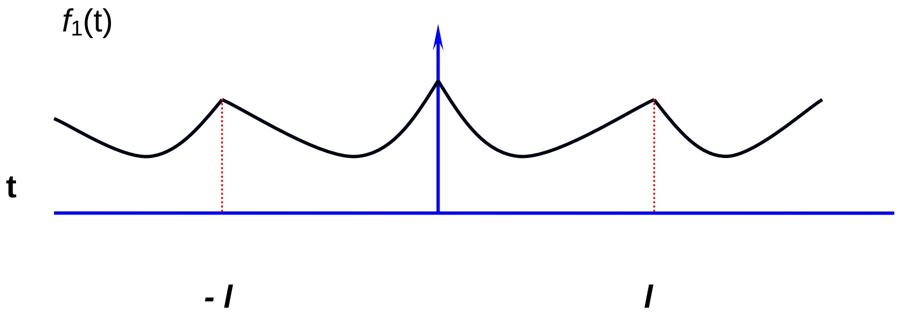
(3) $$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi}{l}t$$ (*f* neparna funkcija)

s koeficijentima:

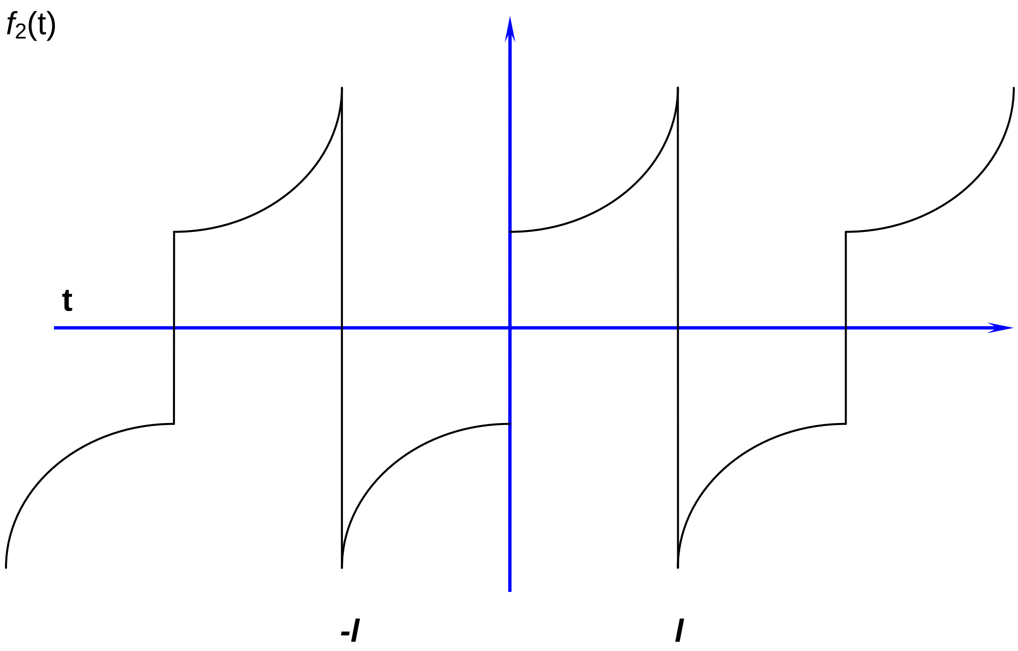
(4) $$b_n = \frac{2}{l}\int_0^{1} f(t)\sin\frac{n\pi}{l}tdt$$



l **t**



(a) periodičko ponavljanje parne funkcije perioda 2*l*



(b) periodičko ponavljanje neparne funkcije perioda 2*l*

6. Fourierov integral

Fourierovi redovi su osnovni alat u proučavanju različitih problema vezanih uz periodične funkcije.

Kako mnogi praktični problemi ne uključuju periodične funkcije poželjno je generalizirati metodu Fourierovog reda i na neperiodične funkcije.

Ako imamo periodičnu funkciju $f_T(x)$ sa periodom T i ako T neograničeno raste, tj. $T \to \infty$, onda rezultirajuća funkcija $f(x)$ nije više periodična.

Imamo periodičnu funkciju $f_T(x)$ sa periodom T i možemo ju pisati pomoću Fourierovog reda :

$$f_T(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{2n\pi}{T} x + b_n \sin \frac{2n\pi}{T} x \right)$$

Ako uzmemo da vrijedi:

$$w_n = \frac{2n\pi}{T}$$

i uvrstimo a_n i b_n prema Eulerovim formulama, označimo varijablu integracije sa ν dobiva se :

$$f_T(x) = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f_t(\upsilon) d\upsilon + \frac{2}{T} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\cos w_n x \int_{-T/2}^{T/2} f_T(\upsilon) \cos w_n \upsilon d\upsilon + \sin w_n x \int_{-T/2}^{T/2} f_T(\upsilon) \sin w_n \upsilon d\upsilon \right)$$

ako je :

$$w_{n+1} - w_n = \frac{2(n+1)\pi}{T} - \frac{2n\pi}{T} = \frac{2\pi}{T}$$

$$\Delta w = w_{n+1} - w_n = \frac{2\pi}{T}$$

onda $2/T = \Delta w / \pi$

i možemo pisati Fourierov red u obliku

$$(1)\quad f_T(x)=\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f_t(\upsilon)d\upsilon+\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\cos(w_n x)\Delta w\int_{-T/2}^{T/2} f_T(\upsilon)\cos w_n\upsilon d\upsilon+\sin(w_n x)\Delta w\int_{-T/2}^{T/2} f_T(\upsilon)\sin w_n\upsilon d\upsilon\right)$$

Taj oblik vrijedi za bilo koji fiksni *T*, proizvoljno velik ali konačan.

Neka *T* → ∞ i pretpostavimo da rezultirajuća neperiodična funkcija

$$f(x)=\lim_{T\to\infty} f_T(x)$$

je integrabilna na x osi tj. integral

$$(2)\qquad \int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|dx$$

postoji.

Onda 1/T → 0 i vrijednost prvog člana da desnoj strani izraza (1) se približava nuli. Također, Δ*w* = *2π/T* → 0 pa je prihvatljivo da beskonačan red (1) postaje integral od 0 do ∞ koji predstavlja *f(x*) prema

$$(3)\qquad f(x)=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}\left(\cos wx\int_{-\infty}^{\infty} f_T(\upsilon)\cos w\upsilon d\upsilon+\sin wx\int_{-\infty}^{\infty} f_T(\upsilon)\sin w\upsilon d\upsilon\right)dw$$

Ako uvedemo supstituciju

$$(4)\qquad A(w)=\int_{-\infty}^{\infty} f(\upsilon)\cos w\upsilon d\upsilon \qquad\qquad B(w)=\int_{-\infty}^{\infty} f(\upsilon)\sin w\upsilon d\upsilon$$

izraz se može pisati u obliku

$$(5)\qquad f(x)=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}\left[A(w)\cos wx+B(w)\sin wx\right]dw$$

Ovakav oblik *f(x)* se naziva **Fourierov integral**.

Granica reda (1) kada se Δw približava nuli nije definicija integrala (3).

Dovoljni uvijeti za valjanost izraza (5) su sljedeći:

TEOREM 1.

Ako je *f(x)* po djelovima neprekinuta na svakom konačnom intervalu i može se s lijeve i desne strane derivirati u svakoj točki i ako integral (2) postoji onda se *f(x)* može pisati pomoću Fourierovog integrala.

U točki gdje je *f(x)* prekinuta vrijednost Fourierova integrala je jednaka granicama lijeve i desne strane funkcije *f(x)* u toj točki prekida.

Ako je *f(x)* parna funkcija, onda je *B(w)* = 0 u izrazu (4) i slijedi izraz

(6) $$A(w) = 2\int_0^\infty f(\upsilon)\cos w\upsilon d\upsilon$$

a (5) se može pisati u jednostavnijem obliku

(7) $$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty A(w)\cos wx dw$$

Ako je *f(x)* neparna funkcija, onda je *A(w)* = 0 i slijedi

(8) $$B(w) = 2\int_0^\infty f(\upsilon)\sin w\upsilon d\upsilon$$

i (5) se može pisati prema

(9) $$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty B(w)\sin wx dw$$

7. Ortogonalne funkcije

Neka su $g_m(x)$ i $g_n(x)$ realne funkcije koje su definirane u intervalu $a \leq x \leq b$ i neka postoji integral produkta $g_m(x) g_n(x)$ na tom intervalu. Integral ćemo označiti kao (g_m, g_n). Prema tome:

(1) $$(g_m, g_n) = \int_a^b g_m(x) g_n(x) dx$$

Za funkcije kažemo da su ortogonalne u intervalu $a \leq x \leq b$ ako je integral (1) jednak nuli:

(2) $$(g_m, g_n) = \int_a^b g_m(x) g_n(x) dx = 0 \qquad (m \neq n)$$

Skup realnih funkcije $g_1(x), g_2(x), g_3(x), \ldots$ zovemo ortogonalni skup funkcija u intervalu $a \leq x \leq b$ ako su te funkcije definirane u tom intervalu i ako je izraz (2) jednak nuli za sve parove različitih funkcije u tom skupu.

Ne-negativan korijen od (g_m, g_m) se zove norma od $g_m(x)$ i obično se označava sa $\|g_m\|$; prema tome

(3) $$\|g_m\| = \sqrt{(g_m, g_m)} = \sqrt{\int_a^b g_m^{\,2}(x) dx}$$

Osnovna pretpostavka. *Sve funkcije koje se pojavljuju su ograničene i imaju svojstvo da integrali koji se pojavljuju postoje i da njihove norme nisu nula.*

Ortogonalni skup $g_1, g_2 \ldots$ u intervalu $a \leq x \leq b$ čije funkcije imaju normu 1 zadovoljavaju relaciju:

(4) $$(g_m, g_n) = \int_a^b g_m(x) g_n(x) dx = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ 1 & m = n \end{cases} \quad \begin{matrix} m = 1, 2, \ldots \\ n = 1, 2, \ldots \end{matrix}$$

Takav skup se naziva ortonormiran skup funkcija u intervalu $a \leq x \leq b$.
Vidljivo je da iz ortogonalnog skupa možemo dobiti ortonormiran skup dijeljenjem svake funkcije s njezinom normom u intervalu koji razmatramo.

Gledajući izvod Eulerove formule (6) iz poglavlja 2.

$$\text{(a)} \quad a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx$$

$$\text{(6)} \quad \text{(b)} \quad a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx$$

$$\text{(c)} \quad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx$$

za Fourierove koeficijente, vidimo da smo jedino slijedili činjenicu da je skup $1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, ...$ ortogonalan na intervalu duljine 2π.
To upućuje na mogućnost prikaza zadane funkcije *f(x)* pomoću bilo kojeg ortogonalnog skupa (6) $g_1(x)$, $g_2(x)$... oblika:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n g_n(x) = c_1 g_1(x) + c_2 g_2(x) + ...$$

i izračunavanja koeficijenata c_1, c_2,...kao u poglavlju 2.

Ako taj red (6) konvergira i predočuje *f(x)* nazivamo ga **generaliziran Fourierov red** funkcije *f(x)*, a njegove koeficijente nazivamo **Fourierovim konstantama** funkcije *f(x)* s obzirom na taj ortogonalni skup funkcija.

Da odredimo konstante, množimo obje strane izraza (6) s $g_m(x)$ i integriramo u intervalu $a \le x \le b$ u kojem su funkcije ortogonalne (pretpostavimo da je parcijalno integriranje dopušteno) i dobivamo:

$$\int_a^b f(x) g_m(x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \int_a^b g_n(x) g_m(x) dx$$

Integral za koji je $m = n$ jednak je kvadratu iznosa $\|g_m\|$,dok su ostali integrali jednaki nuli jer su funkcije međusobno ortogonalne. Prema tome:

$$\text{(7')} \quad \int_a^b f g_m dx = c_m \|g_m\|^2$$

tj,

$$\text{(7)} \quad c_m = \frac{1}{\|g_m\|^2}\int_a^b f(x) g_m(x) dx$$

Ako je skup funkcija ortonormiran tada Fourierove konstante zadovoljevaju Besselovu nejednakost:

(8) $$c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 + \ldots \leq \int_a^b f^2(x)dx$$

Zato red na lijevoj strani konvergira pa:

$c_n \to 0$ pri $n \to \infty$

Literatura

A. E. Kreyzig, “Advanced engineering mathematics”, John Wiley & Sons Inc (1995)

I. Ivanšić, “Fourierovi redovi. Diferencijalne jednadžbe”, Odjel za matematiku, Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku (2000.)